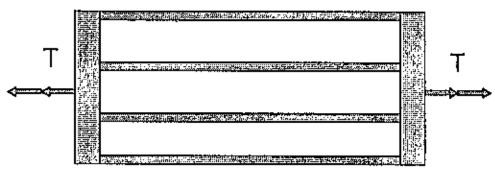
P1 - Mecânica dos Sólicos I - 2006.1

1ª Questão Considere a barra divida em duas regiões de mesmo tamanho ($\frac{L}{2}$)e bi-engastada apresentada de forma esquemática na figura abaixo. Pede-se calcular o estado de tensões e deformações ao longo da barra, em cada uma das situações descritas abaixo, quando esta é submetida a um aumento de temperatura Δt, conhecidos os módulos de elasticidade de cada região E_1 e E_2 bem como os coeficientes de dilatação α_1 e α_2. (a) $E_1 = E_2 = E$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; (b) $E_1 = E_2 = E$ e $\alpha_1 = 2\alpha_2 = \alpha$; (c) $E_1 = 2E_2 = E$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$;

2ª Questão : Dois tubos de mesmo material e de comprimento L, espessura t e raios de 2a e 3a (t<<a) são conecatos através de dois discos rígidos (detalhes na figura abaixo). Esta conexão é de tal forma que os eixos dos tubos cilíndricos coincidem, pede-se então: (a) Calcular o momento torçor máximo T_{elas} de forma que não haja plastificação em nenhum ponto do sistema, considerando que o limite elástico em cisalhamento é dado por τ_Y; (b) Encontrar o ângulo de rotação nas extremidades quando o momento torçor ultrapassar ligeiramente esse limite, atingindo $T = \frac{15}{14}T_{elas}$; (c) neste caso calcule as tensões residuais após o descarregamento ($T = 0$). (obs.: tendo em vista que a espessura t é muito pequena, considera-se que a tensão em cada um dos tubos é constante no sentido radial).



GABARITO P-2

MEC-SÓL I - 2006.2

1ª QUESTÃO (3.0 PONTOS)

PARA TODAS AS SITUAÇÕES

EQUILÍBRIO: $\sigma_1 = \sigma_2$

(a) $\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0}$ (COMPATIBILIDADE GEOM. + SIMETRIA)

$\hookrightarrow$ $\boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = -\alpha E \Delta T}$ (COMPRESSÃO) (1.0)

(b) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ (COMP. GEOM.)

EQ. $\longrightarrow$ $\dfrac{\sigma_1}{E} + \alpha \Delta T = -\dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\alpha}{2} \Delta T$

$$\boxed{\sigma_2 = \sigma_1 = -\frac{3}{4}\alpha E \Delta T \; ; \quad \varepsilon_1 = \frac{\alpha}{4}\Delta T \; ; \quad \varepsilon_2 = -\frac{\alpha}{4}\Delta T}$$ (1.0)

(c) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

EQ. $\longrightarrow$ $\dfrac{\sigma_1}{E} + \alpha \Delta T = -\dfrac{\sigma_1}{2E} - \alpha \Delta T$

$$\boxed{\sigma_2 = \sigma_1 = -\frac{\cancel{4}\,2}{3}\alpha E \Delta T \; ; \quad \varepsilon_1 = +\frac{\alpha}{3}\Delta T \; ; \quad \varepsilon_2 = -\frac{\alpha \Delta T}{3}}$$ (1.0)

2ª QUESTÃO (7.0 PONTOS)

$$I_p = 2\pi t \left[(2a)^3 + (3a)^3 \right] = 70 \pi t a^3$$

(a) TENSÃO MÁXIMA NO TUBO EXTERNO (τ_2)

INÍCIO DA PLASTIFICAÇÃO: $\tau_2 = \tau_y$

LOGO: $$T_{ELAS} = \frac{\tau_y I_p}{3a}$$

$$\boxed{T_{ELAS} = \frac{70}{3} \pi t a^2 \tau_y}$$

3.0
(~~3.0~~)

(b) EQUILÍBRIO:

$$T = 2\pi t (2a)^2 \tau_1 + 2\pi t (3a)^2 \tau_y$$

SENDO $$\tau_1 = 2a G \frac{\Delta\phi}{L}$$

LOGO

$$\frac{15}{14} \frac{70}{3} \pi t a^2 \tau_y = 2\pi t a^2 \left(8 a G \frac{\Delta\phi}{L} + 9 \tau_y \right)$$

$$\boxed{\Delta\phi^* = \frac{7}{16} \frac{L}{a} \frac{\tau_y}{G}}$$

2.0
(~~2.0~~)

(c) DESCARREGAMENTO

$$T = 2\pi t\,(2a)^2\,\tau_1 + 2\pi t\,(3a)^2\,\tau_2$$

ONDE $\tau_1 = 2a\,G\,\frac{\Delta\phi}{L}$ e $\tau_2 = 3a\,G\left(\frac{\Delta\phi}{L} \underbrace{- \frac{\Delta\phi^*}{L} + \frac{\tau_y}{G}}_{\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{RESIDUAL}}\right)$

TENSÕES RESIDUAIS: $T = 0$

$$4\,\tau_1 + 9\,\tau_2 = 0$$

$$8\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} + 27\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} = -27\left(-\frac{\Delta\phi^*}{L} + \frac{\tau_y}{G}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} = -\frac{27}{35}\left(\frac{\tau_y}{G} - \frac{\Delta\phi^*}{L}\right)$$

LOGO:

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{54}{35}\,a\,G\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} \\ \tau_2 &= \frac{24}{35}\,a\,G\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} \end{aligned}}$$

(2.0)