ESCOAMENTO BIFÁSICO

FASES SEPARADAS – PELÍCULA E NÚCLEO

Hipóteses:

Hip 01: escoamento permanente;
Hip 02: escoamento desenvolvido;
Hip 03: escoamento laminar;
Hip 04: fluido newtoniano;
Hip 05: fluido incompressível [rigorosamente, incluída na Hip 04].

Quantidade de Movimento:

$$0 = -\frac{d\,p}{d\,z} - \rho\, g \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\tau\right) \quad . \tag{1.1}$$

A eq.(1.1) é válida para os escoamentos no núcleo e na película em regime permanente. Para o escoamento no núcleo, a massa específica do fluido é $\rho = \rho_N$ e a tensão de cisalhamento é $\tau = \tau_N$; para o escoamento na película, $\rho = \rho_P$ e $\tau = \tau_P$. As soluções particulares da equação (1.1), para estas regiões, devem satisfazer aos requisitos de simetria axial no escoamento do núcleo e de continuidade da tensão de cisalhamento na interface núcleo-película. Tem-se, então, as seguintes condições de contorno:

$$r = 0 \quad : \tau = \tau_N = 0 \quad , \tag{1.2}$$

$$r = R_\delta = R - \delta \ : \ \tau = \tau_N = \tau_P = \tau_\delta \quad , \tag{1.3}$$

onde τ_δ denota a tensão de cisalhamento na interface dos fluidos. No núcleo, $0 \leqslant r \leqslant (R - \delta)$, a solução da eq.(1.1) fornece a tensão de cisalhamento local é dada por:

$$\tau_N = \left[-\frac{d\,p}{d\,z} - \rho_N\, g \operatorname{sen}\theta\right]\frac{r}{2} \quad . \tag{1.4}$$

A tensão de cisalhamento τ_δ , na interface entre o núcleo e a película, eq. (1.3), é, então, dada por:

$$\tau_\delta = \frac{R}{2}\left[-\frac{dp}{dz} - \rho_N g \operatorname{sen}\theta\right]\left(1-\frac{\delta}{R}\right) \quad . \tag{1.5}$$

Para a película, (R - δ) ⩽ r ⩽ R, a solução da eq.(1.1) fornece a tensão de cisalhamento, dada por:

$$\tau_P = \frac{R}{r}\left\{\left[-\frac{dp}{dz} - \rho_P g \operatorname{sen}\theta\right]\frac{R}{2}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\right] + \tau_\delta\left(1-\frac{\delta}{R}\right)\right\} \quad . \tag{1.6}$$

A tensão de cisalhamento τ_0 é obtida fazendo r = R. Obtém-se:

$$\tau_0 = \left[-\frac{dp}{dz} - \rho_P g \operatorname{sen}\theta\right]\frac{R}{2}\,\frac{\delta}{R}\left(2-\frac{\delta}{R}\right) + \tau_\delta\left(1-\frac{\delta}{R}\right) \tag{1.7}$$

Considerando a eq.(1.5), tem-se

$$\tau_P = \frac{R}{2}\left\{\left[-\frac{dp}{dz} - \rho_P g \operatorname{sen}\theta\right]\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\left(1-\frac{\rho_N}{\rho_P}\right)\rho_P g \operatorname{sen}\theta\right\} \quad . \tag{1.8}$$

e, na parede,

$$\tau_0 = \frac{R}{2}\left\{-\frac{dp}{dz} - \left[1 - \left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\left(1-\frac{\rho_N}{\rho_P}\right)\right]\rho_P g \operatorname{sen}\theta\right\} \quad . \tag{1.9}$$

Perfis de Velocidade

Os perfis de velocidade dos fluidos escoando no núcleo e na película são determinados a partir das eq.(1.4) e (1.6), respectivamente, e da consideração de que os fluidos são newtonianos:

$$\tau = -\mu\,\frac{du}{dr} \quad , \tag{1.10}$$

onde μ denota a viscosidade dinâmica do fluido e u a componente axial de sua velocidade local. Os escoamentos devem satisfazer aos requisitos de continuidade da velocidade na interface entre o núcleo e a película,

$$r = R-\delta : u = u_N = u_P = u_\delta \quad , \tag{1.11}$$

onde u_δ denota a componente axial da velocidade dos fluidos na interface, e na interface entre o fluido que escoa na película e a parede, requisito equivalente à condição de aderência:

$$r = R \qquad : u = u_P = 0 \quad . \tag{1.12}$$

Para o fluido que escoa no núcleo, o perfil da componente axial da velocidade é a solução da eq. (1.10), considerando a eq.(1.4) e a condição de contorno dadas pela eq. (1.11). Resulta:

$$u_N = u_\delta + \frac{R^2}{4\,\mu_N}[-\frac{d\,p}{d\,z} - \rho_N\, g\, \mathrm{sen}\theta\,]\;[(1-\frac{\delta}{R})^2 - (\frac{r}{R})^2\,] \quad . \tag{1.13}$$

Para o fluido que escoa na película, o perfil da componente axial da velocidade é a solução da eq. (1.10), considerando a eq.(1.8) e a condição de contorno dadas pela eq. (1.12). Resulta:

$$u_P = \frac{R^2}{4\,\mu_P}\,[-\frac{d\,p}{d\,z} - \rho_P\, g\, \mathrm{sen}\theta\,]\;[\,1-(\frac{r}{R})^2 + 2\,(1-\frac{\delta}{R})^2\,\ln(\frac{r}{R})\,] - \frac{R}{\mu_P}\,\tau_\delta\,(1-\frac{\delta}{R})\,\ln(\frac{r}{R}) \quad . \tag{1.14}$$

Substituindo, nesta equação, para a tensão de cisalhamento na interface, dada pela eq. (1.5), obtém-se

$$u_P = \frac{R^2}{4\,\mu_P}\,[-\frac{d\,p}{d\,z} - \rho_P\, g\, \mathrm{sen}\theta\,]\,[1-(\frac{r}{R})^2\,] - \frac{R^2}{2\,\mu_P}\,(1-\frac{\delta}{R})^2\,\ln(\frac{r}{R})\,(1-\frac{\rho_N}{\rho_P})\,\rho_P\, g\, \mathrm{sen}\theta \tag{1.15}$$

Sendo r / R = 1 – y / R, se é satisfeita a condição 0 ≤ y / R ≤ δ / R << 1, a função logarítmica pode ser aproximada pelos dois primeiros termos da série:

$$\ln(\frac{r}{R}) = \ln(1-\frac{y}{R}) \approx -\frac{y}{R} - \frac{1}{2}(\frac{y}{R})^2 - \ldots \approx -\frac{1}{2}(1-\frac{r}{R})(3-\frac{r}{R}) \quad . \tag{1.16}$$

A componente axial da velocidade local do fluido na película é expressa, então, como:

$$u_P = \frac{R^2}{4\,\mu_P}\,\{\,[-\frac{d\,p}{d\,z} - \rho_P\, g\, \mathrm{sen}\theta\,]\,[1-(\frac{r}{R})^2\,] + (1-\frac{\delta}{R})^2\,(1-\frac{r}{R})(3-\frac{r}{R})(1-\frac{\rho_N}{\rho_P})\,\rho_P\, g\, \mathrm{sen}\theta\,\} \quad . \tag{1.17}$$

Na interface entre o núcleo e a película, a componente axial, u_δ, da velocidade de ambos os fluidos é obtida desta equação, fazendo r / R = 1 – δ / R. Resulta:

$$u_\delta = \frac{R^2}{4\,\mu_P}\,\frac{\delta}{R}\,\{[-\frac{dp}{dz} - \rho_P\, g\, \mathrm{sen}\theta\,]\,(2-\frac{\delta}{R}) + (1-\frac{\delta}{R})^2\,(2+\frac{\delta}{R})\,(1-\frac{\rho_N}{\rho_P})\,\rho_P\, g\,\mathrm{sen}\theta\,\} \quad . \qquad (1.18)$$

Velocidades Médias dos Fluidos

Conhecido o perfil de velocidade de cada fluido, eq.(1.13) e (1.15), agora podem ser definidos e calculados os valores das respectivas velocidades médias em relação à área da seção transversal de cada escoamento. Supondo constante o valor da massa específica de cada fluido, a respectiva velocidade média $\bar{u}$ é definida por:

$$\bar{u} \;\Xi\; \frac{1}{\rho\, A}\;{}_A\!\int \rho\, u\, dA \quad , \qquad (1.19)$$

onde A denota a área da seção transversal do escoamento, respectivamente, do núcleo,

$$A_N = \pi\, R^2\,(1-\frac{\delta}{R})^2 \qquad (1.20)$$

e, da película,

$$A_P = \pi\, R^2\,\frac{\delta}{R}\,(2-\frac{\delta}{R}) \quad , \qquad (1.21)$$

sendo a área infinitesimal

$$dA = 2\,\pi\; r\; dr \quad . \qquad (1.22)$$

Substituindo as eq.(1.13) e (1.20) na eq.(1.19), obtém-se a velocidade média do fluido que escoa no núcleo:

$$\bar{u}_N = u_\delta + \frac{R^2}{8\,\mu_N}\,[-\frac{dp}{dz} - \rho_N\, g\,\mathrm{sen}\theta\,]\;(1-\frac{\delta}{R})^2 \quad . \qquad (1.23)$$

Substituindo as eq.(1.12), (1.18) e (1.19) na eq. (1.16), obtém-se a velocidade média do fluido que escoa na película:

$$\bar{u}_P = \frac{R^2}{8\,\mu_P}\,[-\frac{dp}{dz} - \rho_P\, g\,\mathrm{sen}\theta\,]\,\frac{\delta}{R}\,(2-\frac{\delta}{R}) +$$

$$+\,\frac{R^2}{4\,\mu_P}\,(1-\frac{\delta}{R})^2\,[\,1-\frac{2\,(1-\frac{\delta}{R})^2}{\frac{\delta}{R}\,(2-\frac{\delta}{R})}\,\ln(1-\frac{\delta}{R})\,]\,(1-\frac{\rho_N}{\rho_P})\,\rho_P\, g\,\mathrm{sen}\theta \qquad (1.24)$$

Como antes, esta expressão pode ser simplificada fazendo uso da relação dada pela eq.(1.16). Tem-se, então,

$$\bar{u}_P = \frac{R^2}{8\mu_P}\left[-\frac{dp}{dz} - \rho_P\, g\,\mathrm{sen}\theta\right]\frac{\delta}{R}\left(2-\frac{\delta}{R}\right) +$$

$$+\ \frac{R^2}{4\mu_P}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\left[1+\frac{\left(2+\frac{\delta}{R}\right)}{\left(2-\frac{\delta}{R}\right)}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\right]\left[\left(1-\frac{\rho_N}{\rho_P}\right)\rho_P\, g\,\mathrm{sen}\theta\right] \qquad (1.25)$$

Fluxos Mássicos dos Fluidos

Conhecida a velocidade média de cada fluido, eq.(1.23) e (1.25), podem ser definidos e calculados os valores dos respectivos fluxos mássicos. Supondo constante o valor da massa específica de cada fluido, o respectivo fluxo mássico $\dot{M}$ é definida por:

$$\dot{M} \equiv \rho\,\bar{u}\,A\ . \qquad (1.26)$$

Obtém-se, então, para o escoamento no núcleo,

$$8\,\frac{\rho_N}{\rho_P}\,\frac{\mu_N}{\rho_N^{\,2}}\,\frac{\dot{M}_N}{g\,\pi\,R^4} = -\frac{1}{\rho_P\, g}\,\frac{dp}{dz}\left[\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{\mu_N}{\mu_P}\,2\,\frac{\delta}{R}\left(2-\frac{\delta}{R}\right)\right]\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2$$

$$-\left\{\frac{\rho_N}{\rho_P}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2 + 2\,\frac{\mu_N}{\mu_P}\,\frac{\delta}{R}\left(2-\frac{\delta}{R}\right)\left[1-\frac{2+\frac{\delta}{R}}{2-\frac{\delta}{R}}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\left(1-\frac{\rho_N}{\rho_P}\right)\right]\right\}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\mathrm{sen}\theta \qquad (1.27)$$

e para o escoamento na película,

$$8\,\frac{\mu_P}{\rho_P^{\,2}}\,\frac{\dot{M}_P}{g\,\pi\,R^4} = -\frac{1}{\rho_P\, g}\,\frac{dp}{dz}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\left(2-\frac{\delta}{R}\right)^2$$

$$-\left\{\frac{\delta}{R}\left(2-\frac{\delta}{R}\right) - 2\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\left[1+\frac{2+\frac{\delta}{R}}{2-\frac{\delta}{R}}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)^2\left(1-\frac{\rho_N}{\rho_P}\right)\right]\right\}\frac{\delta}{R}\left(2-\frac{\delta}{R}\right)\mathrm{sen}\theta\,. \qquad (1.28)$$

Para um dado canal de escoamento [R, θ] e um dado par de fluidos [ρ_P, μ_P, ρ_N, μ_N], a solução do escoamento consiste em resolver as equações (1.27) e (1.28), que estabelecem relações entre as quatro variáveis globais do escoamento: os fluxos mássicos dos fluidos, M_N e M_P, a espessura da película, δ, e o perda de carga, dp/dz. Quaisquer duas dessas variáveis podem ser supostas independentes; as duas outras são variáveis dependentes. Em termos físicos, isto significa que, sob as condições supostas, os valores dos fluxos mássicos dos fluidos determinam a espessura da película e o gradiente de pressão.

Parâmetros e Variáveis Adimensionais

Para maior generalização, o modelo da formulação, o modelo analítico é agora expresso em termos de parâmetros e variáveis adimensionais.

1. Parâmetros representativos dos fluídos:

$\rho^* = \frac{\rho_N}{\rho_P}$ - razão das densidades mássicas dos fluídos;

$\mu^* = \frac{\mu_N}{\mu_P}$ - razão das viscosidades dinâmicas dos fluídos;

$\nu^* = \frac{\nu_N}{\nu_P} = \frac{\mu^*}{\rho^*}$ - razão das viscosidades cinemáticas dos fluídos ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$).

2. Parâmetros representativos do canal de escoamento:

θ – ângulo de inclinação do eixo do canal de escoamento.

$Ga_P = \frac{g\,R^3}{8\,\nu_P^{\,2}}$ - Número de Galileu referido ao diâmetro e ao fluído da película

3. Variáveis globais do escoamento:

$\chi = \frac{\dot{M}_N}{\dot{M}_P + \dot{M}_N} = \frac{\dot{M}_N}{\dot{M}}$ - fração mássica do núcleo;

$1 - \chi = \frac{\dot{M}_P}{\dot{M}_P + \dot{M}_N} = \frac{\dot{M}_P}{\dot{M}}$ - fração mássica da película;

$Re_{N,0} = \frac{2\,\dot{M}}{\mu_N\,\pi\,R}$ - Número de Reynolds do fluxo total, referido ao diâmetro e ao fluído do núcleo;

$Re_{P,0} = \dfrac{2\,\dot{M}}{\mu_P\,\pi\,R}$ - Número de Reynolds do fluxo total, referido ao diâmetro e ao fluído da película;

$Re_N = \dfrac{2\,\dot{M}_N}{\mu_N\,\pi\,R} = \chi\,Re_{N,0}$ - Número de Reynolds do fluxo do núcleo;

$Re_P = \dfrac{2\,\dot{M}_P}{\mu_P\,\pi\,R} = (1-\chi)\,Re_{P,0}$ - Número de Reynolds do fluxo da película;

$\eta = \dfrac{\delta}{R}$ - espessura da película;

$\dfrac{d\wp}{d\zeta} = \dfrac{1}{\rho_P\,g}\dfrac{dp}{dz}$ - gradiente de pressão.

4. Variáveis locais do escoamento:

$\epsilon = \dfrac{r}{R}$ - coordenada radial;

$\psi_P = 4\,\dfrac{\mu_P}{\rho_P}\,\dfrac{u_P}{g\,R^2} = 4\,\nu_P\,\dfrac{u_P}{g\,R^2}$ - componente longitudinal da velocidade da película;

$\Im = 2\dfrac{\tau}{\rho_P\,g\,R}$ - tensão cisalhante.

Formulação Adimensional

Utilizando os parâmetros e variáveis adimensionais definidos, resulta, da eq. (1.9), a tensão cisalhante na parede:

$$\Im_0 = -\frac{d\wp}{d\zeta} - [\,1 - (1-\rho^*)\,(1-\eta)^2\,]\,\mathrm{sen}\theta \quad ; \tag{1.29}$$

da eq. (1.5), a tensão cisalhante na interface:

$$\Im_\eta = [-\frac{d\wp}{d\zeta} - \rho^*\,\mathrm{sen}\theta\,]\,(1-\eta) \quad . \tag{1.30}$$

Da eq. (1.17), obtém-se o perfil adimensional de velocidade da película:

$$\psi_P = [-\frac{d\wp}{d\zeta} - \text{sen}\theta]\,(1-\epsilon^2) + (1-\rho^*)\,(1-\eta)^2\,(1-\epsilon)\,(3-\epsilon)\ \text{sen}\,\theta \quad \text{e,} \tag{1.31}$$

da eq. (1.17), a velocidade adimensional na interface:

$$\psi_\eta = [-\frac{d\wp}{d\zeta} - \text{sen}\theta]\,\eta\,(2-\eta) + (1-\rho^*)\,(1-\eta)^2\,(2+\eta)\ \text{sen}\,\theta \quad . \tag{1.32}$$

Da eq. (1.24), tem-se a expressão adimensional para o fluxo mássico no núcleo:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mu^{*2}}{\rho^*}\,\frac{Re_N}{Ga_P} = -\frac{d\wp}{d\zeta}\,[\,(1-\eta)^2 + \mu^*\,2\,\eta\,(2-\eta)\,]\,(1-\eta)^2$$

$$-\{\,\rho^*\,(1-\eta)^2 + 2\,\mu^*\,\eta\,(2-\eta)\,[\,1 - \frac{2+\eta}{2-\eta}\,(1-\eta)^2\,(1-\rho^*)]\}\,(1-\eta)^2\ \text{sen}\theta$$

(1.33)

e, da eq. (1.25), para o fluxo mássico na película:

(1.34)

$$\frac{1}{2}\,\frac{Re_P}{Ga_P} = -\frac{d\wp}{d\zeta}\,\eta^2\,(2-\eta)^2 - \{\,\eta\,(2-\eta) - 2\,(1-\eta)^2\,[\,1 + \frac{2+\eta}{2-\eta}\,(1-\eta)^2\,(1-\rho^*)\,]\,\}\,\eta(2-\eta)\,\text{sen}\theta$$

Para um dado canal [θ], um dado par de fluidos [ρ*, μ*] e a combinação de ambos, representada pelo número de Galileu Ga_P, a solução do sistema de equações (1.33) e (1.34) consiste em obter os valores de duas variáveis dependentes em função de duas variáveis independentes, escolhidas dentre os números de Reynolds Re_N e Re_N, a espessura adimensional da película η e o gradiente adimensional de pressão $d\wp/d\varsigma$. Perfis típicos da velocidade da película podem ser obtidos mediante a eq. (1.31).

Problema: Descrição do Escoamento

a] Refazer o desenvolvimento, conferindo as equações, justificando as simplificações e hipóteses introduzidas. Comentar a formulação.

b] Calcular os limites correspondentes às situações típicas do escoamento descritas em seguida. Comentar a formulação.

c] Apresentar graficamente os resultados da solução geral.

Situações-limite do Escoamento

1. Queda livre da Película:

Eq. (1.30): Tensão cisalhante na interface = 0

Dado η, tem-se $d \wp / d \varsigma$, Re_N da eq. (1.33), Re_P da eq. (1.34).

2. Velocidade nula na interface:

Eq. (1.32): Velocidade na interface = 0

Dado η, tem-se $d \wp / d \varsigma$, Re_N da eq. (1.33), Re_P da eq. (1.34).

3. Fluxo resultante nula, na película:

Eq. (1.34): $Re_P = 0$

Dado η, tem-se $d \wp / d \varsigma$, Re_N da eq. (1.33).

4. Tensão cisalhante nula na parede:

Eq. (1.29): Tensão cisalhante na parede = 0

Dado η, tem-se $d \wp / d \varsigma$, Re_N da eq. (1.33), Re_P da eq. (1.34).

Situações típicas do Escoamento

1. Escoamentos ascendentes no núcleo e na película, tem-se $Re_N > 0$ e $Re_P > 0$.

Dados η e Re_N (com valor absoluto maior que caso 4. anterior), tem-se $d \wp / d \varsigma$ da eq. (1.33), Re_P da eq. (1.34).

2. Escoamentos descendentes no núcleo e na película, tem-se $Re_N < 0$ e $Re_P < 0$.

Dados η e Re_N (com valor absoluto maior que caso 1. anterior), tem-se $d \wp / d \varsigma$ da eq. (1.33), Re_P da eq. (1.34).

Domínio da Solução

Os resultados devem ser obtidos, a cada caso, para

η = 0,1; 0,075; 0,05; 0,025; 0,001; 0,0075; 0,005; 0,0025; 0,0001 .